10-практикалық сабақ
Параметрлік түрде берілген функция туындылары.

y - тің x - ке тәуелділігі t параметрі арқылы $\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\psi(t), \quad t\in[a,в] \end{cases}$

түрінде берілсін. Онда оның туындысы $y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t}$, $x'_t \neq 0$ формуласымен анықталады.

375. Егер $x=t^3+3t+1,\ y=3t^5+5t^3+1$ болса, $y'=\dfrac{dy}{dx}$ табу керек.

Шешуі: $\dfrac{dx}{dt}=3t^2+3,\ \dfrac{dy}{dt}=15t^4+15t^2$. Ендеше, $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{15t^4+15t^2}{3t^2+3}=5t^2$. ▲

376. $x=a\cos t,\ y=a\sin t$ болса, $y'=\dfrac{dy}{dx}$ табу керек. Жауабы: $-ctg\ t$.

377. $x=e^{-t}\sin t,\ y=e^{t}\cos t$ болса, $y'=\dfrac{dy}{dx}$ табу керек. Жауабы: e^{2t}.

378. $\rho=\left(\dfrac{2}{3}\sqrt{\alpha}+1\right)\cdot\alpha,\ \theta=\sqrt{\alpha}\cdot e^{\sqrt{\alpha}}$ болса, $y'=\dfrac{d\rho}{d\theta}$ табу керек.

Жауабы: $2\sqrt{\alpha}\cdot e^{-\sqrt{\alpha}}$.

379. $x=ch\,t,\ y=sh\,t$ болса, $y'=\dfrac{dy}{dx}$ табу керек. Жауабы: $c\text{th}\,t$.

2.4 Жоғарғы ретті туындылар.

Бірінші ретті туындыдан алынған туынды - *екінші ретті туынды*, сол сияқты $(n-1)$- ші ретті туындыдан алынған туынды - n*-ші ретті туынды* деп аталады және сәйкес мына түрде жазылады

$$y'=f'(x),\ y''=(f'(x))'=f''(x),\ldots,y^{(n)}=\left(f^{(n-1)}(x)\right)'=f^{(n)}(x).$$

Егер функция параметрлік түрде берілсе, яғни $\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t), \end{cases} \quad t\in(0,T)$

екінші ретті туындысы

$$y''_{xx}=\frac{y''_{tt}\cdot x'_t - x''_{tt}\cdot y'_t}{(x'_t)^3}$$

формуласымен есептелінеді.

380. $y=x^5+2x^4-3x^3-x^2-0{,}5x+7$. Табу керек $y', y'', y''',\ldots$.

Шешуі: $y'=5x^4+8x^3-9x^2-2x-0{,}5;$

$y''=20x^3+24x^2-18x-2;$

$y'''=60x^2+48x-18;$

$y^{IV}=120x+48, \quad y^{V}=120, \quad y^{VI}=y^{VII}=\ldots=0.$ ▲

381. $y=\ln x$. Табу керек: $y^{(n)}$.

Шешуі: $y'=\frac{1}{x}=x^{-1}$; $y''=-1\cdot x^{-2}$; $y'''=1\cdot 2\cdot x^{-3}$; $y^{IV}=-1\cdot 2\cdot 3\cdot x^{-4},...;$

$y^{(n)}=1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot (n-1)\cdot (-1)^{n-1}\cdot x^{-n}=(-1)^{n-1}\cdot\frac{(n-1)!}{x^n}$. ▲

382. $y=2^x$. Табу керек: $y^{(n)}$.

Шешуі: $y'=2^x\ln 2$; $y''=2^x\ln^2 2$; $y'''=2^x\ln^3 2$; $y^{IV}=2^x\ln^4 2,...;$ $y^{(n)}=2^x\ln^n 2$. ▲

383. $y=\sin x$. Табу керек: $y^{(n)}$.

Шешуі: $y'=\cos x=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$;

$y''=-\sin x=\sin\left(x+2\cdot\frac{\pi}{2}\right)$;

$y'''=-\cos x=\sin\left(x+3\cdot\frac{\pi}{2}\right)$;

....

$y^{(n)}=\sin\left(x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right)$. ▲

384. $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$ параметрлі түрде берілген функцияның бірінші және екінші ретті туындыларын табу керек.

Шешуі:

$$y'=\frac{\left(a\sin^3 t\right)'_t}{\left(a\cos^3 t\right)'_t}=\frac{3a\sin^2 t\cos t}{-3a\cos^2 t\sin t}=-tgt,$$

$$y''=\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\left(-tgt\right)'_t}{\left(a\cos^3 t\right)'_t}=\frac{-\sec^2 t}{-3a\cos^2 t\sin t}=\frac{1}{3a\sin t\cos^4 t}.\quad ▲$$